SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

OPERATORI IPERBOLICI IN SPAZI DI GEVREY

BOLOGNA, 18 APRILE 1985

In questo seminario cercheremo di fornire una rassegna di alcuni dei risultati finora noti riguardanti il problema di Cauchy per equazioni iperboliche lineari con coefficienti e dati in spazi di Gevrey.

Se A è un aperto di R^ν, A' un aperto contenuto in A, $\sigma \geq 1$ ed $h > 0$ indicheremo con $G_b^{(\sigma),h}(A')$ l'insieme di tutte le funzioni $\phi \in C^\infty(A)$ tali che

$$\|\phi\|_{A',h} = \sup_{\alpha \in Z_+^\nu} h^{-|\alpha|}\alpha!^{-\sigma} \sup_{x \in A'} |D^\alpha \phi(x)| < +\infty$$

e porremo

$$G_b^{(\sigma)}(A') = \underset{h\to\infty}{\underrightarrow{\lim}}\; G_b^{(\sigma),h}(A'), \quad G^{(\sigma)}(A) = \underset{A\subset\subset A}{\underleftarrow{\lim}}\; G_b^{(\sigma)}(A'),$$

e se $\sigma > 1$

$$G_0^{(\sigma)}(A) = \underset{\substack{A'\to A \\ A'\subset\subset A}}{\underrightarrow{\lim}}\; \underset{h\to+\infty}{\underrightarrow{\lim}}\; G_b^{(\sigma),h}(A') \cap C_0^\infty(\bar{A}').$$

$G^{(\sigma)'}(A)$ e $G_0^{(\sigma)'}(A)$ indicheranno gli spazi di ultradistribuzioni duali degli spazi $G^{(\sigma)}(A)$ e $G_0^{(\sigma)}(A)$ rispettivamente. Il primo di essi si può identificare con il sottospazio delle ultradistribuzioni di $G_0^{(\sigma)'}(A)$ con supporto compatto. Chiameremo spazi di Gevrey di ordine σ gli spazi di funzioni e di ultradistribuzioni ora definiti[1].

---

[1] Per maggiori dettagli su questi spazi si veda per es. [K1] e [K2].

Considereremo operatori differenziali lineari P in un aperto $A =]-T,T[\times \Omega$ di R^{n+1} che supporremo contenga l'origine di R^{n+1}:

$$(0.1) \qquad P(t,x,D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t,x,D_x)D_t^j \quad , \quad t\in]-T,T[\ , \ x\in\Omega\subset R^n$$

con $a_j(t,x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m-j} a_{j\alpha}(t,x)D_x^\alpha$, $D_t = -i\partial_t$, $D_x = (D_{x_1},\dots,D_{x_n})$, $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$.

Chiameremo simbolo principale dell'operatore P la funzione

$$p(t,x,\tau,\xi) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} \tau^j \sum_{|\alpha|=m-j} a_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha \ , \ (\tau,\xi) \quad R^{n+1}.$$

E' $p(t,x,1,0) \neq 0$ per ogni $(t,x)\in A$ e quindi *la direzione* (0.1) *non è caratteristica per l'operatore* P *in alcun punto di* A.

Come è ben noto il problema di Cauchy per l'operatore P, consistente nel cercare u tale che

$$(0.2) \qquad \begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u = f(t,x) & \text{in }]-T,T[\times\Omega \ , \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) \quad , \quad j = 0,\dots,m-1 \ , & x\in\Omega \ , \end{cases}$$

con f e g_j funzioni od ultradistribuzioni assegnate in $]-T,T[\times\Omega$ ed Ω rispettivamente, è studiato ordinariamente allo scopo di ottenere risultati riguardante i problemi di

a) *esistenza ed unicità della soluzione;*

b) *propagazione delle singolarità delle soluzioni.*

Supporremo che i coefficienti $a_{j,\alpha}$ di P appartengano a $G^{(\sigma)}(A)$ e che i dati f, g_j siano in spazi di Gevrey.

Un primo risultato riguarda una condizione necessaria affinché il problema (0.2) sia $G^{(\sigma)}$ ben posto. Sono stati proposti vari modi di

intendere $G^{(\sigma)}$ ben posto il problema di Cauchy (0.2). V. Ya Ivrii [I2] suppone $A = [0,T[\times \Omega$ ed $a_{j,\alpha} \in G^{(\sigma)}(A)$. S. Mizohata [Mi1] considera anziché lo operatore P un sistema di operatori differenziali del primo ordine con coefficienti continui come funzioni di t ed in $G^{(\sigma)}$ come funzioni di x. Assumeremo qui la seguente definizione di T. Nishitani [N1].

0.1. Definizione. Il problema di Cauchy (0.2) per l'operatore P si dice $G^{(\sigma)}$ ben posto in un intorno dell'origine se esiste un intorno U dell'origine tale che il problema

$$\begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u = 0 & (t,x) \in U \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) \quad , \quad j = 0,\dots,m-1, & x \in U \cap \{t = 0\} \end{cases}$$

abbia una soluzione $C^\infty(U)$ per ogni $g_j \in G^{(\sigma)}(R^n)$, $j = 0,\dots,m-1$.

Il seguente risultato, chiamato teorema di Lax-Mizohata, vale anche assumendo le altre definizioni sopra indicate per problema di Cauchy $G^{(\sigma)}$ ben posto.

0.2. Teorema [I2],[Mi1][N1]. Affinché il problema di Cauchy (0.2) sia $G^{(\sigma)}$ ben posto in un intorno dell'origine è necessario che le *radici caratteristiche* $\tau_j(0,0,\xi)$ *di* P, ossia le radici dell'equazione in τ : $p(0,0,\tau,\xi) = 0$, *siano tutte reali per ogni* $\xi \in R^n$.

Assumeremo quindi per il seguito che tale condizione sia soddisfatta per ogni $(t,x) \in A$, ossia che

$$\text{I)} \qquad (t,x) \in A \quad , \quad p(t,x,\tau\,\xi) \neq 0 \quad \text{se} \quad \operatorname{Im}\tau \neq 0, \ \xi \in R^n \setminus \{0\}.$$

Per quanto riguarda *l'unicità della soluzione del problema* (0.2) si deve subito osservare che se i coefficienti di P non sono anali-

tici non può essere utilizzato il classico teorema di unicità di Holmgren. Anzi, nel caso in cui i coefficienti di P si suppongono in C^∞, si conoscono ormai da tempo vari controesempi a questo teorema dai quali ha preso origine un'ampia problematica. Uno di questi controesempi, dovuto a E. De Giorgi [D1] ed esteso poi da J. Leray [Le1] mostra che se n = 1 e

$$(0.3) \qquad P(t,x,D_t,D_x) = \prod_{k=1}^{m-r} (\partial_t - k\partial_x)\partial_t^r + \prod_{k=1}^{m-r} (\partial_t - k\partial_x) b(t,x,D_x)$$

con b di ordine r-q, $1 \leq q \leq r-1$, allora *l'unicità della soluzione del problema (0.2) in* $\mathcal{B}^\infty([0,T]; G_b^{(\sigma)}(R))$[2] *può mancare se* $\sigma > r/(r-q)$.

La condizione I) non è in generale sufficiente ad assicurare la esistenza di una soluzione, anche distribuzione, del problema (0.2) per ogni $f \in C^\infty(A)$ e $g_j \in C^\infty(\Omega)$, se non nel caso in cui le radici caratteristiche di P, ossia le radici $\tau_h(t,x,\xi)$, h = 1,...,m, del polinomio in τ : $p(t,x,\tau,\xi) = 0$, siano, oltre che reali, tutte semplici per ogni $(t,x) \in A$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$. In tal caso P si dice *strettamente iperbolico*.

Tranne nel caso in cui i coefficienti di P siano costanti, lo studio dei problemi a) e b) appare richiedere trattazioni diverse a seconda che

i) *Le radici caratteristiche di P hanno molteplicità costante qualunque siano* $(t,x) \in A$ *e* $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

ii) *Non si fa alcuna ipotesi sulla molteplicità delle radici caratteristiche di* P.

La diversità di queste due situazioni appare più chiara se si osserva che i) implica che le radici caratteristiche di P sono funzioni analitiche dei coefficienti di P e di ξ e dunque, come funzioni di

---

[2] $\mathcal{B}^\ell(I; G_b^{(\sigma)}(\Omega))$ è lo spazio di tutte le ϕ definite nell'intervallo I di R e con valori in $G_b^{(\sigma)}(\Omega)$, Ω aperto di R^n, ed ivi limitate con tutte le derivate rispetto a t di ordine $\leq \ell$.

(t,x) appartengono a $G^{(\sigma)}(A)$, se si è supposto che ciò accada per i coefficienti $a_{j,\alpha}$ di P, mentre nel caso ii) un teorema di M.D. Bronstein [B1] assicura soltanto che esse sono $C^1(A\times R^n\setminus\{0\})$ e limitate su ogni insieme $K \times R^n\setminus\{0\}$, con K compatto contenuto in A.

E' possibile estendere una parte dei risultati riguardanti i problemi a) e b) nel caso i) anche al caso ii), ove in più si supponga che le radici caratteristiche di P, se pure di molteplicità variabile, abbiano una opportuna regolarità.

1. Già l'esame del caso in cui *i coefficienti di P in (0.1) sono costanti* illustra in modo significativo la diversità dei risultati riguardanti il problema a) quando i dati si suppongono in C^∞ oppure in spazi di Gevrey.

Nel caso C^∞ vale il seguente

1.1. Teorema [H1]. Sia $H = \{x,t)\in R^{n+1}; t \geqq 0\}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché il problema di Cauchy

$$(1.1)\qquad \begin{cases} P(D_t,D_x)u = f & \text{in } H \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) & \text{in } \partial H \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione $u\in C^\infty(H)$ qualunque siano $f\in C^\infty(H)$ e $g_j\in C^\infty(\partial H)$ è che esista $\tau_0\in R$ tale che

$$(1.2)\qquad P(\tau,\xi)\neq 0 \quad \text{se} \quad \xi\in R^n \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\tau<\tau_0.$$

E' facile vedere che (1.2) implica I), mentre in generale I) non è sufficiente ad assicurare che valga (1.2).La condizione I) non è quindi

sufficiente ad assicurare la risolubilità del problema (1.1) per ogni $f \in C^\infty(H)$ e $g_j \in C^\infty(\partial H)$. Un caso in cui ciò accade è quello, già citato in cui P è strettamente iperbolico ossia quando l'equazione in τ : $p(\tau,\xi) = 0$ ha tutte le sue radici (reali e) semplici per ogni $\xi \in R^n \setminus \{0\}$. Una condizione necessaria e sufficiente affinché I) $\Longrightarrow$ (1.2), provata da S.L. Svensson [Sv1], è che i polinomi $P(\tau,\xi)$ e $p(\tau,\xi)$ siano egualmente forti nel senso della ben nota definizione di L. Hörmander. Ciò equivale ad imporre condizioni sui termini di P di ordine inferiore ad m.

Il problema (1.1) quando $f \in G^{(\sigma)}(H)$ e $g_j \in G^{(\sigma)}(\partial H)$ è stato studiato da E. Larsson [La1]. Egli prova il

1.2. Teorema [La1][3]. P soddisfi alla condizione I) e sia r il massimo ordine di molteplicità delle radici caratteristiche di P. Il polinomio $P(\tau,\xi) - p(\tau,\xi)$ sia inoltre di ordine m-q, $1 \le q \le m$. Allora qualunque sia $\sigma \in]1,\sigma_0[$, con $\sigma_0 = r/(r-q)$ se $q < r$ e $\sigma_0 = +\infty$ se $q \ge r$, il problema (1.1) ha una ed una sola soluzione $u \in G^{(\sigma)}(H)$ per ogni $f \in G^{(\sigma)}(H)$, $g_j \in G^{(\sigma)}(\partial H)$.

Si noti che se $q = 1$ non si impone alcuna condizione sui termini di P di ordine inferiore ad m.

La ragione della diversità dei risultati riguardanti il problema (1.1) nel caso di dati C^∞ ed in quello di dati in un opportuno spazio di Gevrey si può comprendere osservando che se P soddisfa alla I) allora se $\sigma_0 = +\infty$, vale (1.2), mentre se $\sigma_0 < +\infty$ si può soltanto affermare che esiste $c > 0$ tale che

$$(1.2') \qquad P(\tau,\xi) \neq 0 \quad \text{se } \xi \in R^n \quad \operatorname{Im}\tau \le -c(1+|\xi|^{1/\sigma_0}).$$

---

[3] Si veda anche [H1], Theorem 12.7.5.

La (1.2') consente tuttavia di costruire una soluzione fondamentale per l'operatore P, appartenente a $G_0^{(\sigma_0)'}(R^{n+1})$ ed avente supporto contenuto in un cono convesso contenuto, tranne il suo vertice, nell'interno di H, e dipendente soltanto dal polinomio p.

Non è possibile invece in questo caso costruire una soluzione fondamentale per P in $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ dotata della stessa proprietà.

2. Risultati del tipo di quello del Teorema 1.2 sono stati provati anche nel caso in cui *l'operatore* P in (0.1) *abbia coefficienti variabili*. La situazione per la quale è noto il maggior numero di risultati, sia per il problema a) che per il problema b) indicati all'inizio, è quella in cui *oltre alla ipotesi* I) si suppone che

i) *le radici caratteristiche di* P, ossia le radici dell'equazione in τ: $p(t,x,\tau,\xi) = 0$ *abbiano molteplicità costante per* $(t,x,\xi)\in A\times(R^n\setminus\{0\})$ ossia quando:

$$p(t,x,\tau,\xi) = \prod_{j=1}^{r} (\tau-\tau_j(t,x,\xi))^{\nu_j},\quad \nu_1 + .. + \nu_r = m,\quad (t,x,\xi)\in A\times(R^n\setminus\{0\}).$$

Come nel Teorema 1.2, l'aggiunta di ulteriori ipotesi sui termini di P di ordine < m può far variare lo spazio di Gevrey in cui il problema di Cauchy è ben posto. Indicheremo tali ipotesi con il nome di *condizioni del tipo di Levi.*

Un primo risultato riguardante il problema a) per il problema (0.2), senza condizione di Levi, è dovuto a Y. Ohya:

2.1. Teorema [01]. Si suppone che l'operatore P dato da (0.1) soddisfi alle ipotesi I) ed i) con $A =]0,T[\times R^n$. Sia inoltre $a_{j,\alpha}\in G^{(\sigma)}(A)$, $\sigma\in]1,m/(m-1)[$ ed $a_{j,\alpha}$, $\alpha = m$, siano limitati in A. Allora per ogni $f\in G^{(\sigma)}(A)$ e $g_j\in G^{(\sigma)}(R^n)$ esiste una soluzione $u\in G^{(\sigma)}(A)$ del problema

(0.2), unica in $C^m(A)$.

Lo stesso risultato vale anzi per $\sigma \in [1, r/(r-1)[$, con $r = \max_h \nu_h$. L'intervallo in cui si può scegliere σ, affinché il problema di Cauchy resti ben posto in $G^{(\sigma)}$, si amplia se si impongono condizioni sui termini di P di ordine minore di m. Si ha per esempio

2.2. Teorema [LO1][4]. Si suppone che in $A =]0,T[\times R^n$, l'operatore P di ordine m sia dato da

$$(2.1) \qquad P = \prod_{i=1}^{r} P_i(t,x,D_t,D_x) + \sum_{j=0}^{m-q} b_j(t,x,D_x) D_t^j \quad , \quad 1 \leq q \leq r,$$

ove P_i, $i = 1,..,r$, siano operatori strettamente iperbolici in A rispetto alla direzione (1.0) e b_j, $j = 0,...,m-q$, siano operatori differenziali lineari rispetto ad $x \in R^n$ di ordine $\leq m-q-j$. Si suppone inoltre che i coefficienti di P siano in $\mathscr{B}^{\ell}([0,T]; G_b^{(\sigma)}(R^n))$, $\ell \in Z_+$. Allora se $\sigma \in [1, r/(r-q)[$, $f \in \mathscr{B}^{\ell}([0,T]; G_b^{(\sigma)}(R^n))$, $g_j \in G_b^{(\sigma)}(R^n)$ esiste una ed una soluzione $u \in \mathscr{B}^{m+\ell}([0,T]; G_b^{(\sigma)}(R^n))$ del problema di Cauchy (0.2).

Osserviamo che un teorema di S. Matsuura [Ma1] assicura che se P soddisfa alle ipotesi I) ed i), allora esistono dei polinomi omogenei in τ,ξ: $q_h(t,x,\tau,\xi)$, $h = 0,...\nu$, strettamente iperbolici rispetto alla direzione (1.0) e con coefficienti in $G^{(\sigma)}(A)$ se tali sono i coefficienti di P, e degli interi positivi d_h, $h = 1,...,\nu$, tali che

$$p(t,x,\tau,\xi) = \prod_{h=1}^{\nu} q_h(t,x,\tau,\xi)^{d_h}$$

Utilizzando questa fattorizzazione H. Komatsu definisce *la irregolarità* s *di un operatore* $P(t,x,D_t,D_x)$ *soddisfacente alle ipotesi* I) *ed*

---

[4] Per altri risultati di questo tipo si veda [Tal 1].

i) e prova che

2.3. Teorema [K3]. Se l'operatore P dato da (0.1) in $A =]-T,T[\times R^n$ soddisfa alle ipotesi I) ed i) ed ha irregolarità $s \geq 1$, allora esistono degli operatori strettamente iperbolici rispetto alla direzione (1.0) $R_i(t,x,D_t,D_x)$ e degli operatori differenziali lineari $L_i(t,x,D_t,D_x)$, $i=1,\dots,d$, tali che

(2.2) $$\text{ord } L_i \leq \text{ord}(R_1 \dots R_i) - i/s \quad ,$$

(2.3) $$P(t,x,D_t,D_x) = \prod_{i=1}^{d} R_i(t,x,D_t,D_x) + \sum_{i=1}^{d-1} L_i(t,x,D_t,D_x) \prod_{h=i+1}^{d} R_h(t,x,D_t,D_x) + L_d(t,x,D_t,D_x) \quad ,$$

ove i coefficienti di tali operatori appartengono in A allo stesso spazio di Gevrey dei coefficienti di P.

Vale inoltre il

2.4. Teorema [K3]. Sia P un operatore della forma (2.3) in $A =]-T,T[\times R^n$ per il quale valga (2.2), con $s \geq 1$ ed R_i, $i = 1,\dots,d$, operatori strettamente iperbolici rispetto alla direzione (1.0) le cui radici caratteristiche siano uniformemente limitate. Allora se i coeffi_
cienti di R_i ed L_i sono in $G^{(\sigma)}(A)$, $\sigma \in [1, s/(s-1)[$,

i) per ogni $f \in G^{(\sigma)}(A)$, $g_j \in G^{(\sigma)}(R^n)$, $j = 0,\dots,m-1$, il pro_
blema di Cauchy (0.1) ha una ed una sola soluzione $u \in G^{(\sigma)}(A)$;

ii) per ogni $f \in C^\infty(]-T,T[; G_0^{(\sigma)'}(R^n))$, $g_j \in G_0^{(\sigma)'}(R^n)$, $j=0,\dots,m-1$, il problema (0.2) ha una ed una sola soluzione $u \in C^\infty(]-T,T[; G_0^{(\sigma)'}(R^n))$.

Inoltre il valore della soluzione nel punto (t_0,x_0) dipende soltanto dai valori dei dati f e g_j nel cono

$$C_{t_0,x_0} = \{(t,x)\in A;\ t\in[0,t_0](t\in[t_0,0]);\ |x-x_0|\leq \tau_{max}|t-t_0|\},$$

ove

$$\tau_{max} = \sup\{\tau_h(t,x,\xi);\ (t,x)\in A,\ \xi\in R^n,\ |\xi| = 1\}$$

e τ_h sono le radici caratteristiche degli operatori R_i.

Nel caso in cui l'operatore P in (0.1) abbia *coefficienti analitici* in $A = [0,T]\times\Omega$ e soddisfi alle ipotesi I) ed i), condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché il problema (0.2) abbia una (ed una sola) soluzione $u\in\mathscr{B}^{\ell}([0,T];\ G^{(\sigma)}(\sigma))$, $\ell\in Z_+$, per ogni $f\in\mathscr{B}^{\ell}([0,T];\ G^{(\sigma)}(\Omega))$, $g_j\in G^{(\sigma)}(\Omega)$, sono state date da V.Ya. Ivrii [I2]. Si dà anzitutto la seguente definizione

2.5. Definizione. Una funzione reale $\phi(y)$, $y = (t,x)\in A$ definita nell'intorno di un punto $y_0 = (t_0,x_0)\in A$ si dice una *funzione fase di molteplicità* $r\geq 1$ se

$$p^{(\alpha)}(y,\nabla_y\phi) = \partial_\eta^\alpha p(y,\eta)\big|_{\eta = \nabla_y\phi} = 0$$

per ogni $\alpha\in Z_+^{n+1}$, $|\alpha|< r$.

Vale allora la seguente *condizione necessaria*

2.6. Teorema [I2]. L'operatore P dato da (0.1) abbia coefficienti analitici in $A = [0,T[\times\Omega$ e sia ϕ una funzione fase di molteplicità $r\geq 1$ definita in un intorno U sufficientemente piccolo di un punto $y_0 = (t_0,x_0)\in A$. Allora, affinché per ogni $T'\in[0,T[$ ed ogni $f\in G_0^{(\sigma)}([T'T[\times\Omega)$

esista $u \in G_0^{(\sigma)'}([T',T[\times\Omega)$ tale che $Pu = f$, supp $u \subset [T',T[\times\Omega$, è necessario che oltre alla I) sia soddisfatta la

$$L_\sigma)\quad \forall \psi \in C^\infty(A;R), h \in C_0^\infty(U)$$

$$P(e^{i\rho\phi+i\psi\rho^{1/\sigma}}h) = \rho^{m-r(1-1/\sigma)}e^{i\rho\phi+i\psi\rho^{1/\sigma}}\Big(\sum_{|\alpha|=r} \alpha!^{-1}p^{(\alpha)}(y,\nabla_y\phi)\nabla_y^\alpha\psi\, h + o(1)\Big)$$

per $\rho \to +\infty$.

Se indichiamo con $p_s(t,x,\tau,\xi)$, $s = 0,..,m-1$, il polinomio in τ,ξ di ordine s costituito dai termini di ordine s del polinomio $'P(t,x,\tau,\xi)$, ossia se poniamo

$$p_s(y,\eta) = p_s(t,x,\tau,\xi) = \sum_{j=0}^{s} \tau^j \sum_{|\alpha|=s-j} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\ , \quad s = 0,..,m-1,$$

$y = (t,x)$, $\eta = (\tau,\xi)$, *la condizione* L_σ), *detta di Levi* , richiede che

$$p_s^{(\alpha)}(y_0,\nabla_y\phi(y_0)) = 0$$

se $s \geq m-(r-|\alpha|)(1-1/\sigma)$. La condizione L_σ) è dunque "vuota" se (e soltanto se) $\sigma < r/(r-1)$.

Per provare questo teorema si stabiliscono anzitutto certe maggiorazioni a priori per la soluzione del problem adi Cauchy (0.2). Se la condizione L_σ) non è soddisfatta si può costruire una soluzione asintotica u_ρ per la quale le formule di maggiorazione non sono valide se $\rho \to +\infty$.

La condizione L_σ) è anche sufficiente per la risolubilità del problema di Cauchy in $G^{(\sigma)}(A)$, quando P soddisfa alle ipotesi I) ed i). Precisamente si ha

2.7. Teorema [I2]. Se P dato da (0.1) ha coefficienti analitici[5] in $A = [0,T[\times \Omega$ e soddisfa alle I) ed i) e se inoltre per ogni $(t_0,x_0) \in A$ ed ogni funzione fase ϕ analitica[6] in un intorno di (t_0,x_0) è soddisfatta la condizione L_σ), allora per ogni $f \in \mathscr{B}^{\ell}([0,T[;\ G^{(\sigma)}(\Omega))$, $\ell \in Z_+$, ed ogni $g_j \in G^{(\sigma)}(\Omega)$, $j = 0,\dots,m-1$, il problema di Cauchy (0.2) ha una ed una sola soluzione $u \in \mathscr{B}^{\ell+m}([0,T[;\ G^{(\sigma)}(\Omega))$.

Una condizione sufficiente affinché valga la conclusione di questo teorema nel caso in cui P abbia coefficienti analitici in $A = [0,T[\times \Omega$, soddisfi alla I) ed abbia radici caratteristiche analitiche in A (non necessariamente di molteplicità costante) è stata provata da V. Schuchman [Sc1].

Il problema b) della propagazione delle singolarità rispetto ad uno spazio di Gevrey della soluzione del problema (0.2) per un operatore P soddisfacente alle condizioni I) ed i) è stato studiato da S. Mizohata [Mi2] e K. Taniguchi [Tan1].

Occorre anzitutto la definizione di *fronte d'onda rispetto alla regolarità Gevrey*.

2.8. Definizione. Sia $g \in G_0^{(\sigma)'}(\Omega)$, Ω aperto di R^n. Si dice che $(x_0,\xi^0) \in T^*\Omega \setminus 0$ non appartiene al fronte d'onda $WF_\sigma(g) \subset T^*\Omega \setminus 0$ di f se esiste un cono aperto $\Gamma \subset R^n \setminus \{0\}$ contenente ξ^0, un intorno U di x_0 ed una funzione $\phi \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ eguale ad uno in U tale che

$$|(\widehat{\phi g})(\xi)| \leq c_0 \exp(-c|\xi|^{1/\sigma}) \quad , \quad \xi \in \Gamma$$

---

[5] Questa ipotesi può essere sostituita da quella che i coefficienti appartengono a $\mathscr{B}^{\max(\ell,m)}([0,T[;\ G^{(\sigma)}(\Omega))$, $\ell \in Z_+$.

[6] E' sufficiente considerare le funzioni fase tali che $\phi(t_0,x) = \langle x,\xi \rangle$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

per delle costanti positive c_0 e c.

$WF_\sigma(g)$ è quindi il complementare dell'unione di tutti i $\mathscr{C} \subset T^*\Omega\setminus 0$ tali che $(x,t\xi) \in \mathscr{C}$ per ogni $t > 0$ se $(x,\xi) \in \mathscr{C}$ e vale la proprietà indicata nella Definizione 2.8 per ogni $(x_0,\xi^0) \in \mathscr{C}$.

Si suppone che i coefficienti di P in (0.1) appartengano a $G_b^{(\sigma)}(A)$, $A = [0,T] \times R^n$ e che P soddisfi a I) e per $|\xi|$ abbastanza grande alla i). Ciò assicura che le radici caratteristiche di P, $\tau_h(t,x,\xi)$, $h = 1,..,\nu$, sono analitiche ed omogenee di grado 1 rispetto a ξ se $|\xi|$ è grande ed appartengono a $G_b^{(\sigma)}(A)$ rispetto a (t,x). Esiste allora $T_0 \in]0,T[$ tale che i problemi

$$(2.4) \qquad \frac{dq_h}{dt} = -\nabla_\xi \tau_h(t,q_h,p_h) \quad , \quad \frac{dp_h}{dt} = \nabla_x \tau_h(t,q_h,p_h)$$

$$q_h|_{t=o} = x_o \quad , \quad p_h|_{t=o} = \xi^0 \qquad n = 1,..,r$$

hanno una ed una sola soluzione $(p_h(t,x_0,\xi^0),\ q_h(t,x_0,\xi^0))$, $h = 1,...r$, per $t \in [0,T_0]$, $x_0 \in R^n$, $\xi^0 \in R^n$, $|\xi^0|$ abbastanza grande.

Taniguchi prova allora il seguente risultato

2.9. Teorema [Tan1]. L'operatore P dato da (0.1) soddisfi alla I) e per $|\xi|$ abbastanza grande alla i). Sia $\sigma \in]1, 1/(\max_{1\le h\le r} (\nu_h - 1)/\nu_h)]$, ove ν_h, $h = 1,...,r$, è la molteplicità della radice caratteristica $\tau_h(t,x,\xi)$ di P, $(t,x) \in A = [0,T] \times R^n$ ed i coefficienti di P siano in $G_b^{(\sigma)}(A)$. Allora esiste $T_0 \in]0,T[$, tale che se $t \in [0,T_0]$ ed u è la soluzione del problema di Cauchy (0.2) con $f \equiv 0$

$$(2.5)\qquad \bigcup_{j=1}^{m-1} WF_\sigma(D_t^j u(t)) = \bigcup_{h=1}^{r}\{q_h(t,x_o,\xi^o),\ \ \rho p_h(t,x_o,\xi^o);$$

$$(x_o,\xi^o)\in\bigcup_{j=0}^{m-1} WF_\sigma(g_j),\ |\xi^o|\ \text{grande},\ \rho>0\}$$

ove (q_h,p_h) è soluzione del problema (2.4), $h = 1,\ldots,r$.

In questo risultato non si impone alcuna condizione sui termini di P di grado inferiore ad m. Contemporaneamente ad esso si prova tuttavia che

2.10. Teorema [Tan 1]. Se P è dato da (2.1), i suoi coefficienti appartengono a $G_b^{(\sigma)}(A)$, $A = [0,T]\times R^n$, $\sigma\in]1,r/(r-q)[$ ed è soddisfatta i), allora per la soluzione del problema di Cauchy (0.2) vale ancora la (2.5), ove τ_h sono le radici caratteristiche dei polinomi P_i, $i= 1,\ldots,r$.

Il caso in cui l'operatore P ha radici caratteristiche di molteplicità variabile presenta ulteriori difficoltà connesse con il fatto, già segnalato più sopra, che tali radici possono non avere sufficiente regolarità. Per la soluzione del problema di Cauchy (0.2) per tali operatori sono stati ottenuti teoremi di esistenza ed unicità in spazi di Gevrey da M.D. Bronstein [B2][7] e teoremi sulla propagazione delle singolarità, sempre rispetto a spazi di Gevrey, da S. Wakabayashi [W1] e supponendo le radici caratteristiche dotate di opportuna regolarità, da Y. Morimoto-K. Taniguchi [MT1].

---

[7] Si veda anche K. Kajitani [K1].

BIBLIOGRAFIA

[B1] M.D. BRONSTEIN, Smoothness of roots of polynomials depending on parameters, Sib. Mat. 24, 20 (1979), 493-501.

[B2] ————————, The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics, Trudy Mosk. Mat. Obsc. 41 (1980), 83-99.

[D1] E. De GIORGI, Un esempio di non unicità della soluzione del problema di Cauchy, Rend. Mat. 14 (1955), 382-387.

[H1] L. HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer Verlag, 1983.

[I1] V.YA. IVRII, Correctness of the Cauchy problem in Gevrey classes for non strictly hyperbolic operators, Mat. Sb. 96 (1975), 390--413.

[I2] ————————, Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Mat. Zh , 17 (1976), 547-563.

[I3] ————————, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristic of variable multiplicity for Gevrey classes, Sib. Mat. Zh. 17 (1976), 1256-1270.

[K1] K. KAJITANI, Cauchy problem for non-structly hyperbolic systems in Gevrey classes, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983), 599-616.

[K1] H. KOMATSU, Ultradistributions, I. Structure theorems and a charac terization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 20 (1973), 25-105.

[K2] ——————, Ultradistributions, II. The kernel theorem and ultra-distributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, 24 (1977), 607-628.

[K3] ——————, Linear hyperbolic equations with Gevrey coefficients, J. Math. pures et appl. 59 (1980), 145-185.

[LA1] E. LARSSON, Generalized hyperbolicity, Ark. Mat. 7 (1966), 11-32.

[LE1] J. LERAY, Equations hyperboliques non strictes: contre-exemples du type De Giorgi aux théoremes d'existence et d'unicité, Math. Annalen 162 (1966), 228-236.

[LO1] J. LERAY-Y. OHYA, Systémes linéaires hyperboliques non-strictes, Centre Belge de Rech. Math.,Deuxième Colloq. sur l'Analyse fonctio nelle, Liège 1964, 105-144.

[MA1] S. MATSUURA, On non-strict hyperbolicity, Proc. Int. Conf. on Funct. Anal. and Related Topics, 1969, Tokyo 1970, 171-176.

[MT1] Y. MORIMOTO-K. TANIGUCHI, Propagation of wave front sets of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic equations in Gevrey classes, in corso di pubblicazione.

[MI1] S. MIZOHATA, On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 298-310.

[MI2] S. MIZOHATA, Propagation de la regularité au sens de Gevrey pour les opérateurs différentiels à multiplicité constante, Equations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes, Séminaire, Hermann, Parigi 1984, 106-133.

[N1] T. NISHITANI, On the Lax-Mizohata theorem in the analytic and Gevrey classes, J. math. Kyoto Univ. 18 (1978), 509-521.

[O1] Y. OHYA, Le probléme de Cauchy pour les équations hyperboliques à characteristique multiple, J. Mat. Soc. Japan, 16 (1964), 268-286.

[SC1] V. SCHUCHMAN, Cauchy problem for equations with multiple characteristics, J. Diff. Eq. 48 (1983), 313-325.

[SV1] S.L. SVENSSON, Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Ark. Mat. 8 (1968), 145-162.

[TAL1] G. TALENTI, Un problema di Cauchy, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3), 18 (1964), 165-186.

[TAN1] K. TANIGUCHI, Fourier integral operators in Gevrey class on R^n and the fondamental solutions for a hyperbolic operator, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20 (1984), 491-542.

[W1] S. WAKABAYASHI, Singularities of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic systems in Gevrey classes, Japan, J. Math. 11 (1985), 157-201.